BIPM Working Party Note 217

Deux nouvelles expressions concernant un temps mort cumulatif

par Jörg W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures, F-92310 SEVRES

Comme il est bien connu, le taux de comptage ρ dû à une source radioactive est diminué par l'insertion d'un temps mort τ de façon qu'à la sortie (voir Fig. 1) le taux expérimental R soit donné par

$$R = \rho \cdot e^{-\rho\tau} \tag{1}$$

si τ est du type cumulatif ou étendu.

Or, dans la situation pratique où R est mesuré, c'est ρ que l'on voudrait exprimer en fonction de R. A part une expression approchée, par exemple de la forme [1]

$$\rho \cong \frac{R}{1 - R\tau - (R\tau)^2/2} \; , \tag{2}$$

qui cesse d'être utilisable pour des taux de comptage très élevés auxquels on s'intéresse aujourd'hui, on ne dispose pas de formule vraiment fiable. Pour se tirer d'affaire on utilise alors des méthodes itératives purement numériques. De cette manière, on peut arriver à un résultat très précis, mais pour des développements théoriques (comme par exemple ceux qui apparaissent pour deux temps morts en série) ce subterfuge n'est pas applicable.

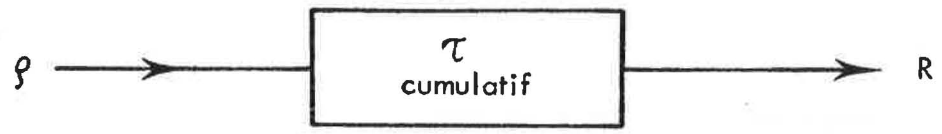

Figure 1 - Notation utilisée pour les taux de comptage avant et après un temps mort τ cumulatif

---

[1] "A Handbook of Radioactivity Measurements Procedures", NCRP Report No. 58 (NCRP, Washington, 1978), eq. 2.11

Nous nous proposons d'esquisser très succinctement une éventuelle solution algébrique de ce problème.

Avec les abréviations

$$x = \rho\tau \qquad \text{et} \qquad z = R\tau, \tag{3}$$

l'équation (1) prend la forme

$$z = x \cdot e^{-x}, \tag{4}$$

dont l'allure est indiquée dans la figure 2.

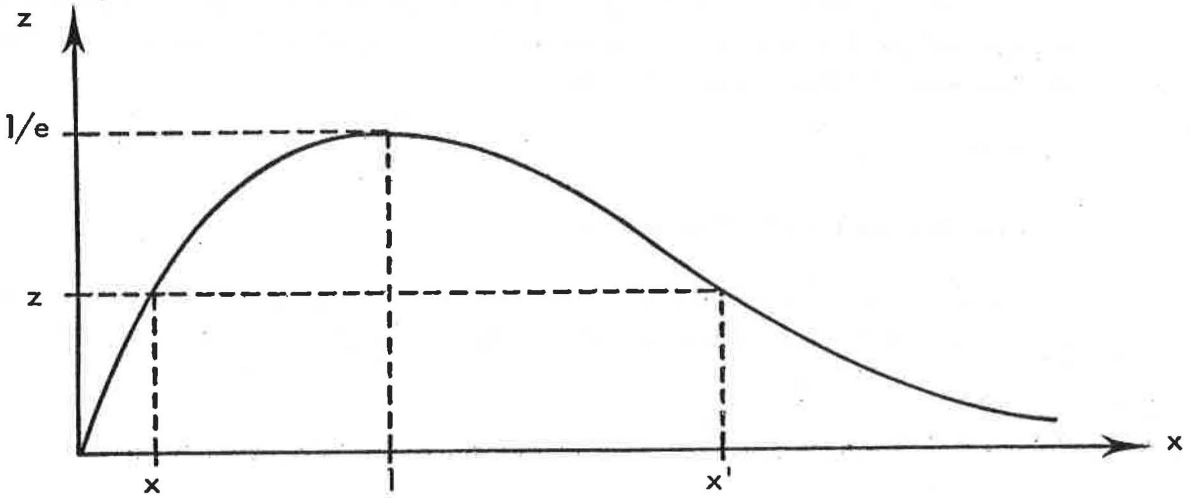

Figure 2 – Représentation graphique de $z = x \cdot e^{-x}$.
On notera que pour une valeur expérimentale $z < 1/e$ il y a deux solutions pour x, avec $0 \leqslant x < 1 < x'$.

Le facteur de transmission T, défini par

$$R = \rho \cdot T, \tag{5}$$

s'exprime facilement en fonction de x puisque

$$T = e^{-x}, \tag{6}$$

mais pour cette grandeur on aurait également préféré disposer d'une expression comportant z comme argument.

En utilisant des développements en série et des formules connues pour inverser les variables, on peut (avec un peu de patience) établir pour x l'expression

$$x = z\left(1 + z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{8}{3}z^3 + \frac{125}{24}z^4 + \frac{54}{5}z^5 + \frac{16\,807}{720}z^6 + \ldots\right). \tag{7}$$

Puisque $T = z/x$, on a aussi

$$T = \left(1 + z + \frac{3}{2} z^2 + \frac{8}{3} z^3 + \frac{125}{24} z^4 + \frac{54}{5} z^5 + \frac{16\,807}{720} z^6 + \ldots\right)^{-1}. \qquad (8)$$

Pour arriver à une expression du type (2), qui facilite une comparaison avec la formule analogue bien connue, valable pour un temps mort non cumulatif, on utilisera les formules habituelles permettant d'obtenir l'inverse d'une série de puissances. Le résultat est

$$T = 1 - z \left(1 + \frac{1}{2} z + \frac{2}{3} z^2 + \frac{9}{8} z^3 + \frac{32}{15} z^4 + \frac{625}{144} z^5 + \ldots\right). \qquad (9)$$

Comment peut-on trouver des formules exactes à partir des développements indiqués en (8) et (9)? Essayons de le deviner ! Il est vrai que cette méthode n'est pas connue pour sa bonne réputation, mais - pourvu qu'elle soit utilisée avec précaution - elle peut rendre des services remarquables. Il va sans dire que les hypothèses avancées doivent être soumises à des contrôles sévères.

On peut vérifier que les termes indiqués dans (8) sont reproduits correctement par la formule

$$1/T = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1)^{j-1}}{j!} \cdot z^j . \qquad (10)$$

De manière semblable, quelques tentatives nous ont amenés à penser que (9) est le début de la série

$$T = 1 - z \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j \cdot z)^j}{(j+1)!} . \qquad (11)$$

La vérification des nouvelles formules générales (10) et (11) peut se faire numériquement: pour une valeur donnée de $x<1$, z est obtenue à l'aide de (4) et T à l'aide de (6), résultat qui se compare aux valeurs numériques déduites (pour un nombre suffisant de termes) de (10) et (11). Un petit programme d'ordinateur a ainsi permis une vérification qui ne laisse guère de doute que les deux formules trouvées de façon heuristique doivent être rigoureuses. Toutefois, la démonstration doit être laissée à un lecteur plus versé en mathématiques. Des résultats numériques de x pour quelques valeurs de z sont indiqués dans le Tableau 1. Les facteurs de transmission correspondants s'obtiennent alors facilement puisque

$$T = z/x = e^{-x} .$$

Ces calculs montrent aussi que la convergence de la formule (11) est plus rapide que celle de (10).

Tableau 1 - Quelques correspondances numériques de $x = \rho\tau$ et $z = R\tau$ pour un temps mort cumulatif

z	x	z	x
0,000 5	0,000 500	0,150	0,179 491
1 0	1 001	155	186 843
1 5	1 502	160	194 317
2 0	2 004	165	201 918
2 5	2 506	170	209 652
3 0	3 009	175	217 524
3 5	3 512	180	225 540
4 0	4 016	185	233 705
4 5	4 520	190	242 028
0,005 0	0,005 025	195	250 514
5 5	5 531	0,200	0,259 171
6 0	6 036	205	268 008
6 5	6 543	210	277 034
7 0	7 050	215	286 259
7 5	7 557	220	295 692
8 0	8 065	225	305 346
8 5	8 573	230	315 233
9 0	9 082	235	325 366
9 5	9 952	240	335 761
0,010 0	0,010 102	245	346 434
15	15 230	0,250	0,357 403
20	20 412	255	368 688
25	25 650	260	380 313
30	30 943	265	392 302
35	36 294	270	404 684
40	41 703	275	417 490
45	47 174	280	430 759
0,050	0,052 706	285	444 531
55	58 302	290	458 856
60	63 963	295	473 791
65	69 692	0,300	0,489 402
70	75 489	305	505 770
75	81 357	310	522 990
80	87 298	315	541 181
85	93 313	320	560 489
90	99 406	325	581 103
95	105 579	330	603 267
0,100	0,111 833	335	627 309
105	118 171	340	653 695
110	124 596	345	683 107
115	131 111	0,350	0,716 639
120	137 718	355	756 237
125	144 421	360	806 084
130	151 223	365	879 820
135	158 128		
140	165 138		
145	172 258		

Or ces nouveaux résultats, quoique bienvenus, ne résolvent pas tous les problèmes soulevés par la formule (1) pour un temps mort cumulatif, qui paraît pourtant si innocente. En particulier, la disparition de la deuxième solution (notée x' dans la Fig. 2) reste mystérieuse, car les transmissions déterminées par (10) et (11) correspondent toujours à une valeur de x qui est inférieure à l'unité.

Plusieurs des problèmes abordés ci-dessus ont été discutés avec Mme Boutillon que je tiens à remercier pour son aide et sa patience.

(Novembre 1980)