Quelques problèmes liés à la décroissance d'une source

par Jörg W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures, F-92310 SEVRES

Après une interruption de deux ans, nous avons repris récemment l'étude de quelques problèmes qui étaient restés en suspens après une tentative de décrire le temps d'arrivée de la première impulsion (voir Rapport BIPM-76/9). Si l'on avait réussi à établir une expression exacte pour la densité de probabilité f(t) de cet événement, l'évaluation des moments n'était possible que de façon approximative.

C'est dans ce domaine de problèmes qu'ont été faits récemment quelques petits progrès que nous nous proposons de signaler dans ce qui suit. Seuls seront indiqués les résultats; une discussion plus complète sera reprise ailleurs.

Pour une source radioactive dont le taux de comptage $\rho(t)$ décroît de façon exponentielle, c'est-à-dire selon la loi

$$\rho(t) = \rho_o \cdot e^{-\lambda t} , \qquad \text{où } 1/\lambda \text{ est la vie moyenne,}$$

on peut montrer que l'arrivée de l'impulsion $k = 1, 2, \ldots$ est donnée par la densité

$$f_k(t) = \frac{\rho_o}{(k-1)!} \left[\frac{\rho_o}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right]^{k-1} \cdot \exp \left\{ - \left[\rho_o \left(\frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} \right) + \lambda \right] t \right\} ,$$

ce qui généralise la formule indiquée antérieurement pour le cas $k = 1$.

L'évaluation exacte des <u>moments</u> se révèle difficile. Nous les désignons d'abord pour l'ordre r par

$$M_{k,r}(t) \equiv \int_0^\infty t^r \cdot f_k(t) \, dt .$$

Avec la nouvelle variable $y = e^{-\lambda t}$ et en posant $\rho_o / \lambda = \eta$, on arrive à (pour $\lambda > 0$)

$$M_{k,r}(t) = (-1)^r \frac{\rho_o}{(k-1)!} \frac{\eta^{k-1} \cdot e^{-\eta}}{\lambda^{r+1}} \int_0^1 (\ln y)^r (1-y)^{k-1} e^{\eta y} \, dy .$$

Cette intégrale est peu commode. Un développement du logarithme en puissance de $z = 1-y$, suivi de plusieurs transformations, permet d'arriver à la forme

$$M_{k,r}(t) = \frac{1}{(k-1)!\,\rho_o^r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_{j,r}}{\eta^j} \cdot \gamma(j+k+r, \eta) \quad ,$$

où

$b_{j,r}$ sont des coefficients calculables par récurrence (et tabulés jusqu'à $r = 4$), tandis que

$\gamma(N, \eta)$ est la fonction incomplète gamma qui, à l'aide des probabilités de Poisson

$$\mathcal{P}_\eta(j) = \frac{\eta^j}{j!} \cdot e^{-\eta} ,$$

peut être exprimée par

$$\gamma(n+1, \eta) = n! \sum_{j=n+1}^{\infty} \mathcal{P}_\eta(j) \ .$$

Considérons le cas le plus simple, c'est-à-dire $r = 0$, où l'on a $b_{j,o} = \delta_{j,o}$, donc

$$M_{k,o}(t) = \frac{1}{(k-1)!} \gamma(k, \eta) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \mathcal{P}_\eta(j) \ .$$

La distribution cumulative de Poisson est disponible sous forme de tables numériques.

Ce résultat nous révèle que les densités $f_k(t)$ ne sont pas normalisées à l'unité pour $\lambda > 0$. Par conséquent, il convient de définir de nouveaux moments d'ordre r par

$$m_{k,r}(t) \equiv M_{k,r}(t)/M_{k,o}(t) \ .$$

En particulier, on obtient donc pour le temps moyen d'attente pour la désintégration numéro k (sous condition qu'elle se produise), puisque $b_{j,1} = 1/(j+1)$,

$$m_{k,1}(t) = \frac{1}{\rho_o \cdot \gamma(k, \eta)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma(k+j, \eta)}{j \cdot \eta^{j-1}} \ .$$

Pour la première impulsion ($k=1$), il est possible de donner une solution exacte qui prend la forme

$$m_{1,1}(t) = \frac{\eta \cdot e^{-\eta}}{\rho_o(1-e^{-\eta})} \left\{ Ei(\eta) - \ln \eta - C \right\} ,$$

où

$Ei(\eta)$ est l'intégrale exponentielle et

$C \cong 0,577\,2$ est la constante d'Euler.

Une évaluation numérique à l'aide de cette formule donne le résultat assez surprenant que l'intervalle moyen, pour une activité initiale donnée, n'est pas une fonction monotone de la vie de la source, mais qu'il passe par un maximum avant d'atteindre la valeur limite $1/\rho_o$ pour $\lambda \longrightarrow 0$. Cet effet provient essentiellement de la normalisation et il serait intéressant de voir s'il peut être confirmé par une simulation.

Pour $\lambda \ll \rho_o$ une formule approximative donne

$$m_{1,1}(t) \cong \frac{1}{\rho_o} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j!}{\eta^j} = \frac{1}{\rho_o}\left[1 + \frac{\lambda}{\rho_o} + 2\left(\frac{\lambda}{\rho_o}\right)^2 + 6\left(\frac{\lambda}{\rho_o}\right)^3 + \ldots\right],$$

dont les deux premiers termes sont en accord avec un résultat donné auparavant.

Au lieu de passer par des sommes Poissoniennes, on peut aussi écrire plus explicitement, toujours pour le premier moment,

$$m_{k,1}(t) = \frac{\eta \cdot e^{-\eta}}{\rho_o \cdot \gamma(k,\eta)} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{u=k}^{\infty} \frac{\eta^u}{j \cdot (j+k)\,(j+k+1)\,\ldots\,(j+u)} \;.$$

Dans cette expression, on voit apparaître des sommes du type

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ j \prod_{s=0}^{u} (j+k+s) \right\}^{-1}$$

que l'on peut définir de façon générale, par exemple par

$$_{\mathcal{H}}S_K \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \prod_{k=\mathcal{H}}^{K} (n+k) \right\}^{-1} .$$

Par des procédés numériques sur ordinateur (qui seront expliqués ailleurs) il a été possible d'établir la formule générale suivante (pour $\mathcal{H} = 1, 2, \ldots$ et $K \geqslant \mathcal{H}$)

$$_{\mathcal{H}}S_K = \frac{(\mathcal{H}-1)!\,\sum_{j=1}^{\mathcal{H}} j \cdot s(\mathcal{H}, j) \cdot K^{j-1}}{K!\,\prod_{j=0}^{\mathcal{H}-1} (K-j)} ,$$

où $s(n,k)$ est un nombre de Stirling de première espèce.

Pour $\mathcal{H} = 1$, on a en particulier

$$ {}_1S_K = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \prod_{k=0}^{K} (n+k) \right\}^{-1} = \frac{1}{K \cdot K!} \quad , $$

ce qui est en accord avec le seul résultat de ce type connu antérieurement.

Si l'on utilise les sommes ${}_{\mathcal{H}}S_K$, supposées disponibles maintenant, le premier moment s'écrit aussi sous la forme

$$ m_{k,1}(t) = \frac{\eta \cdot e^{-\eta}}{\rho_o \cdot \gamma(k,\eta)} \sum_{n=k}^{\infty} \eta^n \cdot {}_kS_n \quad , $$

ce qui, pour k = 1, donne l'expression

$$ m_{1,1}(t) = \frac{\eta \cdot e^{-\eta}}{\rho_o \cdot \gamma(1,\eta)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta^n}{n \cdot n!} \quad . $$

Or, pour des valeurs élevées de η ces formules pourraient donner lieu à des problèmes de convergence.

Voilà, en bref, l'état actuel de ces questions. L'évaluation détaillée des moments d'ordre supérieur reste à faire.

Le but original de cette approche qui, on le voit, se complique déjà de façon dangereuse, était de déduire une généralisation de la simple loi de Poisson qui tienne compte de la décroissance de la source pendant la mesure. Il est évident qu'elle n'est pas encore visible à l'horizon. Vu les multiples problèmes d'ordre mathématique qui s'opposent à une telle démarche et qui vont en augmentant, on ne peut guère espérer arriver à bout de ce programme. En particulier, on n'ose plus penser aux complications supplémentaires dues à la présence d'un temps mort. Néanmoins, pour le moment, on continue les tentatives.

(Décembre 1978)